UTN
Ingeniería de sistemas
Investigación Operativa
Profesor: Mg. Ing. Ricardo D. Carlevari

TEMA 2

ALUMNO:.........................................................

Parcial: 11/06/24

**1. (50 puntos)** La empresa CARMONA desea establecer su plan de producción para sus tres productos A, B y C sujeto a las siguientes tres restricciones: mano de obra (650 horas – hombre por mes), materia prima (420 Kg por mes) y demanda mínima conjunta de los tres productos (130 unid/mes). Los requerimientos de mano de obra por cada unidad producida de cada producto son (3, 5, 2), respectivamente y los requerimientos de materia prima (7, 4, 3) respectivamente. Se sabe además que los beneficios unitarios de los productos son, respectivamente: $2, $5 y $3.

**Observación importante: respetar el orden en que han sido dadas las restricciones**

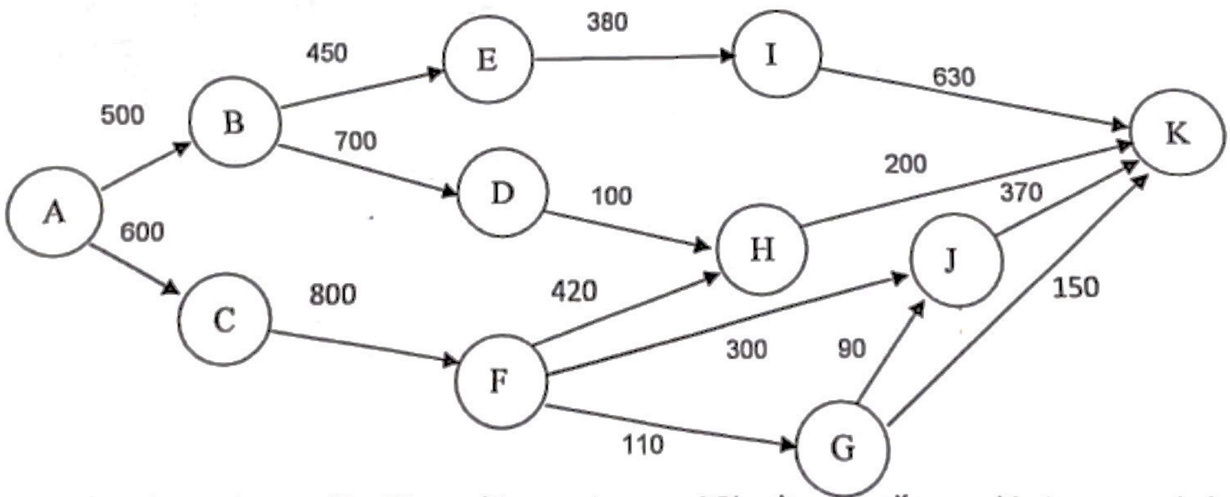
**Tabla Óptima**

| Ck | Xk | B | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $X_4$ | | | | | | -3 | -7 |
| | $X_2$ | | | | | | 1 | 3 |
| | $X_3$ | | | | | | -1 | -4 |
| | | | | | | | | |

Se pide:

a) Armar la tabla inicial del Simplex y completar la tabla óptima sin usar el Método Simplex
b) Cuál es el beneficio mínimo que debería tener el producto A para que convenga producirlo. Justificar
c) Cuánto sería lo máximo que estaría dispuesto a pagar por un kg adicional de M.P.? Justificar
d) Qué cambios se producen en la solución hallada si la restricción de producción mínima se reduce a 125 unidades, cambia el funcional? Cambia la estructura de la solución óptima?. Justificar
e) Hallar el rango de variación del beneficio unitario de C dentro del cual no se altera la estructura de la solución óptima hallada
f) Determinar si es conveniente fabricar un nuevo producto que requiere 4 hs. de mano de obra, 7 Kg. de materia prima y participa en la restricción de demanda mínima, si su beneficio unitario es de $9. En caso afirmativo, calcular la nueva solución.
g) Determinar si se altera la solución hallada al agregarse una restricción de combustible, según la cual, se necesitan 4, 3 y 2 litros/unidad para los productos A, B y C respectivamente y se dispone de 200 litros. En caso de modificarse, encontrar la nueva tabla óptima del dual.

**2. (40 puntos)** En el gráfico se observa una red de distribución de agua. En cada tramo se indica la capacidad máxima de la cañería en m3. Se busca formular un modelo de programación lineal que permita llegar desde A a K con el mayor caudal de agua posible.




**3. (10 puntos)** a) Cómo se identifica gráficamente y en el Simplex un polígono abierto en maximización? Ejempl
b) Qué función cumplen las variables slacks y las variables artificiales. Ejemplos.

I.O. | Parcial Único | 11-6-24 | Tema 2

① La empresa Cormona desea establecer su plan de producción para sus tres productos A, B y C sujeto a los sig. tres restricciones: mano de obra (650 HH/mes), materia prima (420 kg/mes) y demanda mínima conjunta de los tres productos (130 u/mes)

Los requerimientos de M.O por cada unidad productiva son (3, 5, 2) respect. y los req. de MP (7, 4, 3) resp.

Se sabe, además, que los beneficios unitarios de los productos son, resp.: $2, $5 y $3.

Tabla óptima

| | | | 2 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_k$ | $X_k$ | $B_k$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ |
| 0 | $X_4$ | 300 | -11 | 0 | 0 | 1 | -3 | -7 |
| 5 | $X_2$ | 30 | 4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 |
| 3 | $X_3$ | 100 | -3 | 0 | 1 | 0 | -1 | -4 |
| Z = 450 | | | 9 | 0 | 0 | 0 | 2 | 3 |
| | | | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

Se pide:

a) Armar la tabla inicial del Simplex y completar la tabla óptima sin usar el Método Simplex,

$Z = 2X_1 + 5X_2 + 3X_3$ (MAX) $\rightarrow Z = 2X_1 + 5X_2 + 3X_3 - M\mu$

Sujeto a:

$x_4$ MO) $3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 650$
$x_5$ MP) $7X_1 + 4X_2 + 3X_3 \leq 420$
$x_6$ DM) $X_1 + X_2 + X_3 \geq 130$

$\rightarrow$
$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + X_4 = 650$
$7X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_5 = 420$
$X_1 + X_2 + X_3 - X_6 + \mu = 130$

Tabla inicial

| | | $C_j$ | 2 | 5 | 3 | 0 | 0 | 0 | -M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_k$ | $X_k$ | $B_k$ | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $\mu$ |
| 0 | $X_4$ | 650 | 3 | 5 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $X_5$ | 420 | 7 | 4 | 3 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| -M | $\mu$ | 130 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| Z = -130M | | | -M-2 | -M-5 | -M-3 | 0 | 0 | M | 0 |

MAX

Notas:

$A_6$ inicial $= -1$ $\quad$ $B_{inicial} = \begin{pmatrix} 650 \\ 420 \\ 130 \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad A_{1i} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overbrace{A_{2i} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\text{Básico } f} \quad A_{3i} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$A_{1f} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad B_f = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 650 \\ 420 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix}$

b) ¿Cuál es el beneficio mínimo que debería tener el producto A para que convenga producirlo?

$A \to x_1$ : i) $x_1$ es variable No básica $\to$ tiene costo de oportunidad $= 9$
ii) beneficio en el funcional $\to$ $benef_{c_1} = 2$

El beneficio es la suma de i) e ii) $\to$ $\boxed{Benef_{min} = \$11}$

c) ¿Cuánto sería lo máximo que estaría dispuesto a pagar por un kg adicional de MP?

El valor marginal de cada kg de MP es de \$2 $\to$ $\boxed{precio_{max} = \$2}$

d) ¿Qué cambios se producen en la solución hallada si la restricción de producción mínima se reduce a 125 unidades? ¿Cambia el funcional? ¿Cambia la estructura de la solución óptima?

$x_6$ DM inicial $= 130$ $\qquad$ $X_6$ NO es básica así que es un "recurso" saturado
DM final $= 125$ $\qquad$ $\hookrightarrow$ No hubo sobrante. Se hicieron justo 130 u

Cambia el funcional pero NO la estructura

$\to$ 5 unidades menos $\qquad$ Por $\boxed{\text{cada unidad}}$ que no fabrica

Columna $A_6$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | $X_4$ | $-7$ | |
| 100 | $X_2$ | 3 | $\to$ hay 3 unidades más de B $\to +15u_B$ |
| | $X_3$ | $-4$ | $\to$ hay 4 unidades menos de C $\to -20u_C$ |
| | | 3 | $\to$ el funcional aumenta \$3 |

5
3

$\hookrightarrow Z = 450 + 3 \times 5 = 415$

$\boxed{\begin{matrix} X_2 = 45 \\ X_3 = 80 \end{matrix}}$ $\qquad$ $\boxed{Z = 465}$

La última fila $(z_j - c_j)$ se mantiene con los mismos signos pues se hacen más unidades con $a_{ij} > 0$ y menos unidades con $a_{ij} < 0$

Notas:

| IO | Parcial único | Fecha: 11-6-24 |
|---|---|---|
| | | tema 2 |

e) Hallar el rango de variación del beneficio unitario de C dentro del cual no se altera la estructura de la sol. óptima.

$C \to x_3 \to$ es básica $\to$ P/$c_3$ sup busco $a_{ij} < 0 \to$ hay 3

M m
↑ - +
↓ + -

$$c_{3\,sup} = 3 + \left[\frac{9}{3} ; \frac{2}{1} ; \frac{3}{4}\right]_{min} \to \boxed{c_{3\,sup} = 3{,}75}$$

P/$c_3$ inf busco $a_{ij} > 0$ : $\nexists \Rightarrow \boxed{c_{3\,inf} = -\infty}$

f) Determinar si es conveniente fabricar un nuevo producto que requiere 4 hs de MO, 7 kg de MP y participa en la restricción de demanda mínima, si su beneficio unitario es de \$9. En caso afirmativo, calcular la nueva inversión.

Nuevo producto : $4y_1 + 7y_2 - y_3 = \$9$

s/tabla óptima : $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 3 \to 4 \times 0 + 7 \times 2 - 3 = 11$

$11 > 9 \Rightarrow$ NO conviene
(gano menos con 9 que con 11)

g) Determinar si se altera la solución hallada al agregarse una restricción de combustible, según el cual se necesitan 4, 3 y 2 litros/unidad para A, B y C resp. y se disponen de 200 l.

En caso de modificarse, encontrar la nueva tabla óptima del dual

directo

$$\begin{cases} MO)\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 650 \\ MP)\ 7x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 420 \\ DM)\ -x_1 - x_2 - x_3 \leq -130 \\ Comb)\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200 \end{cases}$$

$y_7$

dual

$$\begin{cases} 3y_1 + 7y_2 - y_3 + 4y_7 \geq 2 \\ 5y_1 + 4y_2 - y_3 + 3y_7 \geq 5 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 + 2y_7 \geq 3 \end{cases}$$

$4 \times 0 + 3 \times 30 + 2 \times 100 = 290$

MAX: $Z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$ , $x_1 = 0, x_2 = 30, x_3 = 100$

requiero más litros de los que dispongo $\boxed{290 > 200}$

Se altera la sol. óptima hallada

inicial

| | | | 650 | 420 | -130 | | | | M | M | M | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ck | Yk | Bk | $A'_1$ | $A'_2$ | $A'_3$ | $A'_4$ | $A'_5$ | $A'_6$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $A'_7$ |
| M | $\mu_1$ | 2 | 3 | 7 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| M | $\mu_2$ | 5 | 5 | 4 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 |
| M | $\mu_3$ | 3 | 2 | 3 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 1 | 2 |
| | Z = 10 M | | 10M-650 | 14M-420 | -3M +130 | -M | -M | -M | 0 | 0 | 0 | 9M -200 |

todos -1

Notas: MIN

$Z = 650y_1 + 420y_2 - 130y_3 + 200y_4$

Armo la tabla óptima dual desde la óptima directa

| | | $c_j$ | 650 | 420 | -130 | 0 | 0 | 0 | 200 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_R$ | $y_R$ | $B_R$ | $A'_1$ | $A'_2$ | $A'_3$ | $A'_4$ | $A'_5$ | $A'_6$ | $A'_7$ | |
| 0 | $y_4$ | 9 | 11 | 0 | 0 | 1 | -4 | 3 | 2 | 5,5 |
| 420 | $y_2$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 3 |
| -130 | $y_3$ | 3 | 7 | 0 | 1 | 0 | -3 | 4 | 1 | 7 |
| | $z = 450$ ✓ | | -300 | 0 | 0 | 0 | -30 | -100 | 90 | |
| | | | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |

sale $y_2$

entra $y_7$

Viene de

$$M_{inv} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A'_7 = M_{inv} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

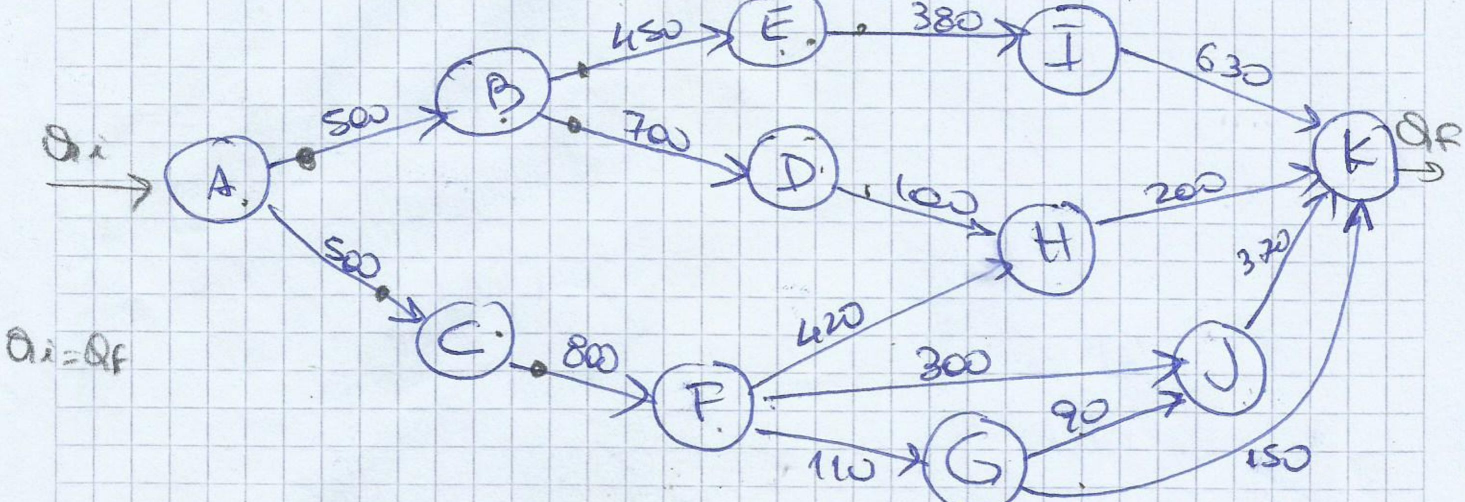
| | | | 650 | 420 | -130 | 0 | 0 | 0 | 200 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $y_4$ | 5 | 5 | -2 | 0 | 1 | -2 | 1 | 0 |
| 200 | $y_7$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 |
| -130 | $y_3$ | 1 | 4 | -1 | 1 | 0 | -2 | 3 | 0 |
| | $z = 270$ | | -570 | -90 | 0 | 0 | 60 | -190 | 0 |

entra $y_5$ sale $y_4$

En donde hay un zj-cj positivo todos los aij son negativos
-> POLÍGONO ABIERTO

| IO | Parcial Único | HOJA Tema 2 |
|---|---|---|
| | | FECHA 11-6-24 |

(2) En el gráfico se observa una red de distribución de agua. En cada tramo se indica la capacidad máxima de la cañería en $m^3$.
Se busca formular un modelo de PL que permita llegar desde A a K con el mayor caudal de agua posible.




$X_{ij}$ = caudal de agua que va del nodo i al nodo j
(V. continua $\geq 0$)

$X$ = caudal de agua que sale de A y llega a K

| | |
|---|---|
| NA) $X - X_{AB} - X_{AC} = 0$ | $X_{AB} \leq 500$ |
| NB) $X_{AB} - X_{BC} - X_{BD} = 0$ | $X_{AC} \leq 500$ |
| NC) $X_{AC} - X_{CF} = 0$ | $X_{BE} \leq 450$ |
| ND) $X_{BD} - X_{DH} = 0$ | $X_{BD} \leq 700$ |
| NE) $X_{BE} - X_{EI} = 0$ | $X_{CF} \leq 800$ |
| NF) $X_{CF} - X_{FH} - X_{FJ} - X_{FG} = 0$ | $X_{EI} \leq 380$ |
| NG) $X_{FG} - X_{GJ} - X_{GK} = 0$ | $X_{DH} \leq 100$ |
| NH) $X_{FH} + X_{DH} - X_{HK} = 0$ | $X_{FH} \leq 420$ |
| NI) $X_{EI} - X_{IK} = 0$ | $X_{FJ} \leq 300$ |
| NJ) $X_{FJ} + X_{GJ} - X_{JK} = 0$ | $X_{FG} \leq 110$ |
| NK) $X_{IK} + X_{HK} + X_{JK} - X = 0$ | $X_{GJ} \leq 90$ |
| | $X_{GK} \leq 150$ |
| | $X_{IK} \leq 630$ |
| | $X_{HK} \leq 200$ |
| | $X_{JK} \leq 370$ |

$Z = X$ (MAX)

NOTA